Παράρτημα 4

ΓΕΙΩΣΗ ΣΕ ΕΔΑΦΟΣ ΜΕ ΗΜΙΣΦΑΙΡΙΚΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ

Π4.1 Παραγωγή αναλυτικών εκφράσεων (Περιοχή Ι)

Π4.1.1 Οριοθέτηση του προβλήματος

Σε κάθε περιοχή του χώρου με ειδική αντίσταση εδάφους ρ, σε σημείο $r=r_0$ της οποίας υπάρχει σημειακή πηγή σταθερού ρεύματος I, από την 3η εξίσωση του Maxwell ισχύει:

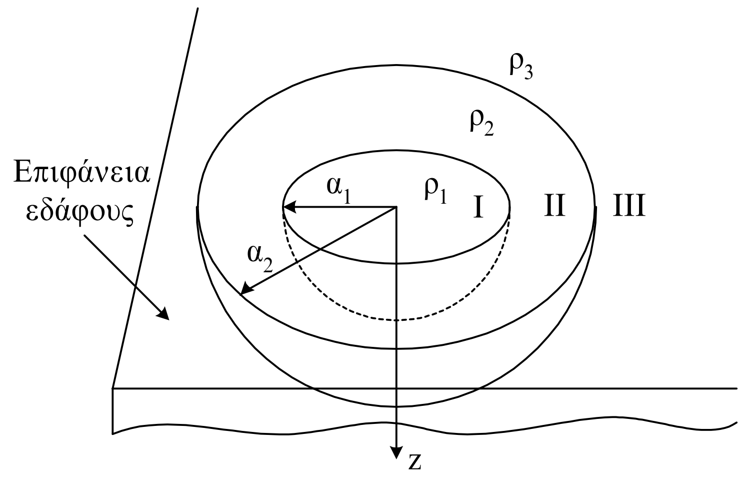
$$\nabla\vec{\mathrm{E}} = \rho \cdot I \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{Π4.1.α}$$

και

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{Π4.1.β}$$

Όμως, επειδή το πεδίο δεν είναι χρονομεταβλητό, ισχύει $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Επομένως, ο συνδυασμός των δύο παραπάνω εξισώσεων δίνει:

$$\nabla^2 V = \rho \cdot I \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{Π4.2}$$



Σχήμα Π4.1: Εδάφη με ημισφαιρική διαστρωμάτωση

Θεωρείται η τριστρωματική δομή του εδάφους του σχήματος Π4.1 [181]. Τα δύο ομόκεντρα ημισφαίρια ακτίνων α_1 και α_2, χωρίζουν το έδαφος σε τρεις περιοχές I, II και III, οι οποίες έχουν ειδική αντίσταση ρ_1, ρ_2 και ρ_3 αντίστοιχα.

Εξετάζεται η περίπτωση μίας σημειακής πηγής ρεύματος, σε ένα μέσο το οποίο χωρίζεται σε τρεις περιοχές από δύο ομόκεντρες σφαίρες και του οποίου το μισό είναι αέρας, όπως φαίνεται στο σχήμα Π4.1. Στην περίπτωση που η πηγή ρεύματος είναι στην περιοχή I (r_0<α_1), οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που ισχύουν για κάθε περιοχή είναι [181]:

$$\nabla^2 V_I = -\rho_1 \cdot I \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \qquad \text{για } r<\alpha_1 \tag{Π4.3.α}$$

$$\nabla^2 V_{II} = 0, \qquad \text{για } \alpha_1<r<\alpha_2 \tag{Π4.3.β}$$

$$\nabla^2 V_{III} = 0, \qquad \text{για } r>\alpha_2 \tag{Π4.3.γ}$$

Προκειμένου να επιλυθεί η πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων, η οποία είναι Poisson, γίνεται η αντικατάσταση [181, 247, 248]:

$$V_I = V_I' + \frac{\rho_1 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|} \tag{Π4.4}$$

Για το σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων ισχύει ότι:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \frac{1}{r_>} \cdot \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^n \cdot P_n^m(\cos\theta_0) \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \tag{Π4.5}$$

όπου $r_>$=Max(r,r$_0$), $r_<$=Min(r,r$_0$), ενώ $P_n^m(\cos\theta_0), P_n^m(\cos\theta)$ είναι τα πολυώνυμα ή συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους [247, 248] και ε_m ο παράγοντας του Neumann [247] με $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & \gamma\iota\alpha\ m = 0 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ m \neq 0 \end{cases}$

Έτσι, το σύστημα (Π4.3) μετατρέπεται σε Laplace [247]:

$$\nabla^2 V_I' = 0, \qquad \text{για } r<\alpha_1 \tag{Π4.6.α}$$

$\nabla^2 V_{II} = 0$, για $\alpha_1<r<\alpha_2$ (Π4.6.β)

$\nabla^2 V_{III} = 0$, για $r>\alpha_2$ (Π4.6.γ)

Π4.1.2 Γενικές λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων

Η (Π4.6.α) έχει σε γενική μορφή την ακόλουθη λύση:

$$V_I' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C'_{mn} \cdot r^n + D'_{mn} \cdot r^{-(n+1)}) \cdot \left[E'_{mn} \cdot P_n^m(\cos\theta) + G'_{mn} \cdot Q_n^m(\cos\theta)\right]$$

$$\cdot \left[A'_{mn} \cdot \sin(m \cdot \phi) + B'_{mn} \cdot \cos(m \cdot \phi)\right] \quad (\Pi 4.7.\alpha)$$

Οι συντελεστές $A'_{mn}, B'_{mn}, C'_{mn}, D'_{mn}, E'_{mn}, G'_{mn}$, είναι προσδιοριστέοι. Όμως, επειδή αναζητούνται φραγμένες λύσεις, οι συναρτήσεις Legendre $Q_n^m(\cos\theta)$ δευτέρου είδους που απειρίζονται πρέπει να μην εμφανίζονται στη λύση [247]. Άρα για τον συντελεστή G'_{mn} ισχύει G'_{mn}=0 και επιπλέον, επειδή ο όρος $r^{-(n+1)}$ απειρίζεται στο r=0, πρέπει και ο συντελεστής D'_{mn}=0.

Άρα:

$$V_I' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} C'_{mn} \cdot r^n \cdot E'_{mn} \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \left[A'_{mn} \cdot \sin(m \cdot \phi) + B'_{mn} \cdot \cos(m \cdot \phi)\right] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} C'_{mn} \cdot r^n \cdot E'_{mn} \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot M'_{mn} \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \Rightarrow \{C'_{mn} \cdot E'_{mn} \cdot M'_{mn} = A_{mn}\}$$

$$V_I' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_{mn} \cdot r^n \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \quad (\Pi 4.7.\beta)$$

Στην εξαγωγή της παραπάνω σχέσης έχει ληφθεί υπ’ όψιν ότι ισχύει (από την τριγωνομετρία):

$$A'_{mn} \cdot \sin(m \cdot \phi) + B'_{mn} \cdot \cos(m \cdot \phi) = M'_{mn} \cdot \sin[m \cdot (\phi + \phi_0)] = M'_{mn} \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)]$$

με $M'_{mn} = \sqrt{A'^2_{mn} + B'^2_{mn}}$ και $\cos\phi_0 = \dfrac{A'_{mn}}{M'_{mn}}$, ενώ $\sin\phi_0 = \dfrac{B'_{mn}}{M'_{mn}}$.

Αντικαθιστώντας την (Π4.7.β) και την (Π4.5) στη (Π4.4) προκύπτει:

$$V_I = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_1 \cdot I_{mn} \cdot \frac{1}{r_>} \cdot \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n + A_{mn} \cdot r^n\right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \qquad (\Pi 4.7.\gamma)$$

όπου

$$I_{mn} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \varepsilon_m \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot P_n^m(\cos\theta_0) \qquad (\Pi 4.7.\delta)$$

Όσον αφορά τη σχέση (Π4.7.γ) πρέπει να σημειωθεί ότι είναι $r_< = r_0$ και $r_> = r$. Άρα η (Π4.7.γ) γράφεται:

$$V_I = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_1 \cdot I_{mn} \cdot \frac{r_0^n}{r^{n+1}} + A_{mn} \cdot r^n\right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \qquad (\Pi 4.7.\varepsilon)$$

Όμοια η (Π4.6.β) έχει λύση:

$$V_{II} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(C''_{mn} \cdot r^n + D''_{mn} \cdot r^{-(n+1)}\right) \cdot \left[E''_{mn} \cdot P_n^m(\cos\theta) + G''_{mn} \cdot Q_n^m(\cos\theta)\right]$$

$$\cdot [A''_{mn} \cdot \sin(m \cdot \phi) + B''_{mn} \cdot \cos(m \cdot \phi)] \qquad (\Pi 4.7.\sigma\tau)$$

Ανάλογα με προηγουμένως, επειδή το πολυώνυμο Legendre $Q_n^m(\cos\theta)$ απειρίζεται, πρέπει ο συντελεστής $G''_{mn} = 0$. Άρα, η λύση γίνεται:

$$V_{II} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C''_{mn} \cdot r^n + D''_{mn} \cdot \frac{1}{r^{n+1}}) \cdot E''_{mn} \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot M''_{mn} \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \Rightarrow$$

$$\{ E''_{mn} \cdot C''_{mn} \cdot M''_{mn} = B_{mn},\ E''_{mn} \cdot D''_{mn} \cdot M''_{mn} = C_{mn} \}$$

$$V_{II} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(B_{mn} \cdot r^n + C_{mn} \cdot \frac{1}{r^{n+1}}) \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \qquad (\Pi 4.7.\zeta)$$

Τέλος, η εξίσωση (Π4.6.γ) δέχεται ως λύση:

$$V_{III}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C'''_{mn}\cdot r^{n}+D'''_{mn}\cdot\frac{1}{r^{n+1}})\cdot[E'''_{mn}\cdot P_{n}^{m}(\cos\theta)+G'''_{mn}\cdot Q_{n}^{m}(\cos\theta)]$$

$$\cdot[A'''_{mn}\cdot\sin(m\cdot\phi)+B'''_{mn}\cdot\cos(m\cdot\phi)] \qquad (Π4.7.η)$$

Ανάλογα με τα προεκτεθέντα, επειδή το πολυώνυμο Legendre $Q_{n}^{m}(\cos\theta)$ απειρίζεται, πρέπει ο συντελεστής $G'''_{mn}=0$ και, επειδή η r^n απειρίζεται για $r\to\infty$, έπεται ότι $C'''_{mn}=0$. Επομένως:

$$V_{III}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}D'''_{mn}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\cdot E'''_{mn}\cdot P_{n}^{m}(\cos\theta)\cdot M'''_{mn}\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_{0})]\Rightarrow$$

$$\{D'''_{mn}\cdot E'''_{mn}\cdot M'''_{mn}=D_{mn}\}$$

$$V_{III}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}D_{mn}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\cdot P_{n}^{m}(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_{0})] \qquad (Π4.7.θ)$$

Άρα, τελικά οι εξισώσεις που προκύπτουν από τις (Π4.7.γ), (Π4.7.ζ) και (Π4.7.θ), λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι $r_0<α_1$, είναι συγκεντρωτικά οι εξής:

$$V_{I}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_{1}\cdot I_{mn}\cdot\frac{r_{0}^{n}}{r^{n+1}}+A_{mn}\cdot r^{n}\right]\cdot P_{n}^{m}(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_{0})] \qquad (Π4.8.α)$$

$$V_{II}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[B_{mn}\cdot r^{n}+C_{mn}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\right]\cdot P_{n}^{m}(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_{0})] \qquad (Π4.8.β)$$

$$V_{III}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}D_{mn}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\cdot P_{n}^{m}(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_{0})] \qquad (Π4.8.γ)$$

Π4.1.3 Οριακές συνθήκες του προβλήματος

Στα σύνορα ($r=α_1$ και $r=α_2$) πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις συνέχειας του δυναμικού, οπότε:

$$V_{I}|_{r=a_{1}}=V_{II}|_{r=a_{1}} \qquad (Π4.9.α)$$

$$V_{II}\big|_{r=a_2} = V_{III}\big|_{r=a_2} \qquad (\Pi 4.9.\beta)$$

Επίσης, στα σύνορα (r=α_1 και r=α_2) πρέπει να είναι ίσες και οι εφαπτομενικές συνιστώσες, οπότε:

$$\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{\partial V_I}{\partial r}\Big|_{r=a_1} = \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial V_{II}}{\partial r}\Big|_{r=a_1} \qquad (\Pi 4.10.\alpha)$$

$$\frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial V_{II}}{\partial r}\Big|_{r=a_2} = \frac{1}{\rho_3}\cdot\frac{\partial V_{III}}{\partial r}\Big|_{r=a_2} \qquad (\Pi 4.10.\beta)$$

Είναι εμφανές, από τις οριακές συνθήκες, ότι πρέπει να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι των λύσεων που προηγήθηκαν στις εξισώσεις (Π4.8).

Έτσι, ισχύει:

$$\frac{\partial V_I}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[-\rho_1\cdot I_{mn}\cdot(n+1)\cdot\frac{r_0^n}{r^{n+2}} + n\cdot A_{mn}\cdot r^{n-1}\right]$$

$$\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] \qquad (\Pi 4.11.\alpha)$$

$$\frac{\partial V_{II}}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[n\cdot B_{mn}\cdot r^{n-1} - (n+1)\cdot C_{mn}\cdot\frac{1}{r^{n+2}}\right]$$

$$\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] \qquad (\Pi 4.11.\beta)$$

$$\frac{\partial V_{III}}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[(-n-1)\cdot D_{mn}\cdot\frac{1}{r^{n+2}}\right]\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] \qquad (\Pi 4.11.\gamma)$$

Από την πρώτη οριακή συνθήκη (Π4.9.α) και με τη βοήθεια των εξισώσεων (Π4.8.α) και (Π4.8.β) προκύπτει ότι:

$$V_I\big|_{r=a_1} = V_{II}\big|_{r=a_1} \Rightarrow \qquad \{r=\alpha_1>r_0\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_1 \cdot I_{mn} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{r_0}{a_1}\right)^n + A_{mn} \cdot a_1^n\right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[B_{mn} \cdot a_1^n + C_{mn} \cdot \frac{1}{a_1^{n+1}}\right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \Rightarrow$$

{Πολλαπλασιάζονται και τα δύο μέλη με $P_{n'}^m(\cos\theta)$ }

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_1 \cdot I_{mn} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{r_0}{a_1}\right)^n + A_{mn} \cdot a_1^n\right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot P_{n'}^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[B_{mn} \cdot a_1^n + C_{mn} \cdot \frac{1}{a_1^{n+1}}\right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot P_{n'}^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\cos\theta) \cdot P_{n'}^m(\cos\theta) \cdot d\theta \cdot \sum_{m=0}^{n}\left[\rho_1 \cdot I_{mn} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{r_0}{a_1}\right)^n + A_{mn} \cdot a_1^n\right] \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] =$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\cos\theta) \cdot P_{n'}^m(\cos\theta) \cdot d\theta \cdot \sum_{m=0}^{n}\left[B_{mn} \cdot a_1^n + C_{mn} \cdot \frac{1}{a_1^{n+1}}\right] \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \Rightarrow$$

$$\left[\rho_1 \cdot I_{mn} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{r_0}{a_1}\right)^n + A_{mn} \cdot a_1^n\right] \cdot \int_0^{\pi} \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \cdot d\phi =$$

$$\left[B_{mn} \cdot a_1^n + C_{mn} \cdot \frac{1}{a_1^{n+1}}\right] \cdot \int_0^{\pi} \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \Rightarrow$$

$$a_1^n \cdot A_{mn} - a_1^n \cdot B_{mn} - \frac{1}{a_1^{n+1}} \cdot C_{mn} = -\rho_1 \cdot I_{mn} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{r_0}{a_1}\right)^n \qquad (\Pi 4.12.\alpha)$$

Από τη δεύτερη οριακή συνθήκη (Π4.9.β) και με τη βοήθεια των εξισώσεων (Π4.8.β) και (Π4.8.γ) λαμβάνεται:

$V_{II}\,|_{r=a_2} = V_{III}\,|_{r=a_2} \Rightarrow$ {r=α$_2$>r$_0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[B_{mn}\cdot a_2^n + C_{mn}\cdot\frac{1}{a_2^{n+1}}\right]\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} D_{mn}\cdot\frac{1}{a_2^{n+1}}\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)]$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την οποία προέκυψε η σχέση (Π4.12.α), λαμβάνεται από την παραπάνω σχέση:

$$a_2^n\cdot B_{mn} + \frac{1}{a_2^{n+1}}\cdot C_{mn} - \frac{1}{a_2^{n+1}}\cdot D_{mn} = 0 \qquad \text{(Π4.12.β)}$$

Από τη οριακή συνθήκη (Π4.10.α) προκύπτει, με την βοήθεια των (Π4.11.α) και (Π4.11.β), ότι:

$$\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{\partial V_I}{\partial r}\Big|_{r=a_1} = \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial V_{II}}{\partial r}\Big|_{r=a_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_1\cdot I_{mn}\cdot(-n-1)\cdot\frac{r_0^n}{a_1^{n+2}} + n\cdot A_{mn}\cdot a_1^{n-1}\right]\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] =$$

$$\frac{1}{\rho_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[n\cdot B_{mn}\cdot a_1^{n-1} + C_{mn}\cdot(-n-1)\cdot\frac{1}{a_1^{n+2}}\right]\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)]$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, η οποία οδήγησε στις σχέσεις (Π4.12.α) και (Π4.12.β), προκύπτει από την παραπάνω σχέση:

$$\frac{n}{\rho_1}\cdot\alpha_1^{n-1}\cdot A_{mn} - \frac{n}{\rho_2}\cdot a_1^{n-1}\cdot B_{mn} + \frac{n+1}{\rho_2}\cdot\frac{1}{\alpha_1^{n+2}}\cdot C_{mn} = \mathrm{I}_{mn}\cdot(n+1)\cdot\frac{r_0^n}{a_1^{n+2}} \qquad \text{(Π4.12.γ)}$$

Από τη οριακή συνθήκη (Π4.10.β) προκύπτει, με τη βοήθεια των (Π4.11.β) και (Π4.11.γ), ότι :

$$\frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial V_{II}}{\partial r}\Big|_{r=a_2} = \frac{1}{\rho_3}\cdot\frac{\partial V_{III}}{\partial r}\Big|_{r=a_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[n\cdot B_{mn}\cdot a_2^{n-1}+C_{mn}\cdot(-n-1)\cdot\frac{1}{a_2^{n+2}}\right]\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)]=$$

$$\frac{1}{\rho_3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[(-n-1)\cdot D_{mn}\cdot\frac{1}{a_2^{n+2}}\right]\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)]$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, η οποία κατέληξε στις σχέσεις (Π4.12.α), (Π4.12.β) και (Π4.12.γ), προκύπτει από την παραπάνω σχέση:

$$\frac{n}{\rho_2}\cdot a_2^{n-1}\cdot B_{mn}-\frac{n+1}{\rho_2}\cdot\frac{1}{\alpha_2^{n+2}}\cdot C_{mn}+\frac{n+1}{\rho_3}\cdot\frac{1}{\alpha_2^{n+2}}\cdot D_{mn}=0 \qquad (\Pi 4.12.\delta)$$

Συγκεντρωτικά δημιουργείται το σύστημα:

$$\begin{cases} (\Pi 4.9.\alpha)\Rightarrow a_1^n\cdot A_{mn}-a_1^n\cdot B_{mn}-\dfrac{1}{a_1^{n+1}}\cdot C_{mn}=-\rho_1\cdot I_{mn}\cdot\dfrac{1}{a_1}\cdot\left(\dfrac{r_0}{a_1}\right)^n \\ (\Pi 4.9.\beta)\Rightarrow a_2^n\cdot B_{mn}+\dfrac{1}{a_2^{n+1}}\cdot C_{mn}-\dfrac{1}{a_2^{n+1}}\cdot D_{mn}=0 \\ (\Pi 4.9.\gamma)\Rightarrow \dfrac{n}{\rho_1}\cdot a_1^{n-1}\cdot A_{mn}-\dfrac{n}{\rho_2}\cdot a_1^{n-1}\cdot B_{mn}+\dfrac{n+1}{\rho_2}\cdot\dfrac{1}{a_1^{n+2}}\cdot C_{mn}=I_{mn}\cdot(n+1)\cdot\dfrac{r_0^n}{a_1^{n+2}} \\ (\Pi 4.9.\delta)\Rightarrow \dfrac{n}{\rho_2}\cdot a_2^{n-1}\cdot B_{mn}-\dfrac{n+1}{\rho_2}\cdot\dfrac{1}{a_2^{n+2}}\cdot C_{mn}+\dfrac{n+1}{\rho_3}\cdot\dfrac{1}{a_2^{n+2}}\cdot D_{mn}=0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

(Π4.13)

Π4.1.4 Επίλυση του 4 επί 4 γραμμικού συστήματος

Για την επίλυση του συστήματος που προέκυψε χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Mathematica. Η λύση του προηγούμενου συστήματος (Σ) είναι:

$$\Big\{\Big\{A_{mn}\to -\frac{(1+n)\,I_{mn}\,a_1^{-1-2n}\,r_0^n\,\rho_1\,(a_1^{1+2n}\,(n\rho_1+(1+n)\,\rho_2)\,(\rho_2-\rho_3)+a_2^{1+2n}\,(\rho_1-\rho_2)\,((1+n)\,\rho_2+n\rho_3))}{n\,(1+n)\,a_1^{1+2n}\,(\rho_1-\rho_2)\,(\rho_2-\rho_3)+a_2^{1+2n}\,((1+n)\,\rho_1+n\rho_2)\,((1+n)\,\rho_2+n\rho_3)},$$

$$B_{mn}\to -\frac{(1+n)\,(1+2n)\,I_{mn}\,r_0^n\,\rho_1\,\rho_2\,(\rho_2-\rho_3)}{n\,(1+n)\,a_1^{1+2n}\,(\rho_1-\rho_2)\,(\rho_2-\rho_3)+a_2^{1+2n}\,((1+n)\,\rho_1+n\rho_2)\,((1+n)\,\rho_2+n\rho_3)},$$

$$C_{mn}\to \frac{(1+2n)\,I_{mn}\,a_2^{1+2n}\,r_0^n\,\rho_1\,\rho_2\,((1+n)\,\rho_2+n\rho_3)}{n\,(1+n)\,a_1^{1+2n}\,(\rho_1-\rho_2)\,(\rho_2-\rho_3)+a_2^{1+2n}\,((1+n)\,\rho_1+n\rho_2)\,((1+n)\,\rho_2+n\rho_3)},$$

$$D_{mn}\to \frac{(1+2n)^2\,I_{mn}\,a_2^{1+2n}\,r_0^n\,\rho_1\,\rho_2\,\rho_3}{n\,(1+n)\,a_1^{1+2n}\,(\rho_1-\rho_2)\,(\rho_2-\rho_3)+a_2^{1+2n}\,((1+n)\,\rho_1+n\rho_2)\,((1+n)\,\rho_2+n\rho_3)}\Big\}\Big\}$$

(Π4.14)

Η παραπάνω παραγοντοποιημένη λύση απλοποιήθηκε περαιτέρω, ώστε να είναι πιο εύχρηστη.

$$\begin{cases} A_{mn} = -I_{mn} \cdot \rho_1 \cdot \dfrac{n+1}{n} \cdot \\ \cdot \dfrac{\left[\left(1 + \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right) \cdot \left(\dfrac{r_0}{a_2}\right)^n \cdot \dfrac{1}{a_2^{n+1}} - \left(1 + \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cdot \left(\dfrac{r_0}{a_1}\right)^n \cdot \dfrac{1}{a_1^{n+1}} \right]}{\Delta} \\ B_{mn} = -\dfrac{2 \cdot n + 1}{n} \cdot \rho_1 \cdot \left(1 - \dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right) \cdot \dfrac{I_{mn}}{\Delta} \cdot \left(\dfrac{r_0}{a_2}\right)^n \cdot \dfrac{1}{a_2^{n+1}} \\ C_{mn} = \dfrac{2 \cdot n + 1}{n} \cdot \rho_1 \cdot \dfrac{I_{mn}}{\Delta} \cdot \left(1 + \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right) \cdot r_0^n \\ D_{mn} = \dfrac{(2 \cdot n + 1)^2}{n \cdot (n+1)} \cdot \dfrac{I_{mn}}{\Delta} \cdot \dfrac{\rho_1 \cdot \rho_3}{\rho_2} \cdot r_0^n \end{cases}$$

(Π4.15)

με $$\Delta = \left[\left(1 + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\rho_3}{\rho_2}\right) - \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_2}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n+1} \right] \quad (\Pi 4.16)$$

Π4.1.5 Εύρεση της έκφρασης του δυναμικού σε κάθε περιοχή

Παρακάτω γίνεται η ανάλυση με την οποία οι λύσεις της σχέσης (Π4.8) μπορούν να δοθούν με τη βοήθεια των συναρτήσεων Legendre, αλλά στην κανονικοποιημένη τους μορφή. Έτσι, από τις σχέσεις (Π4.4) και (Π4.7.β) προκύπτει:

$$V_I = \frac{\rho_1 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_{mn} \cdot r^n \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos[m \cdot (\phi - \phi_0)] \quad (\Pi 4.17)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις σχέσεις (Π4.15) και (Π4.7.δ) λαμβάνεται:

$$V_I = \frac{\rho_1 \cdot I}{4\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cdot P_n^m(\cos\theta_0)\cdot\rho_1\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\left(\frac{r_0}{a_2}\right)^n\cdot\frac{1}{a_2^{n+1}}-\left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\left(\frac{r_0}{a_1}\right)^n\cdot\frac{1}{a_1^{n+1}}\right]}{\varDelta}\cdot$$

$$\left.\cdot r^n\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)]\right)$$

$$\Rightarrow V_I = \frac{\rho_1 \cdot I}{4\cdot\pi}\cdot\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta}\cdot \mathrm{Y}_n^m(\theta,\theta_0,\phi,\phi_0)\right] \qquad (\Pi 4.18)$$

όπου

$$\varDelta_1 = \left[\left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\left(\frac{r_0}{a_2}\right)^n\cdot\frac{1}{a_2^{n+1}}-\left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\left(\frac{r_0}{a_1}\right)^n\cdot\frac{1}{a_1^{n+1}}\right]\cdot r^n$$

(Π4.19)

Όμοια από τις σχέσεις (Π4.8.β), (Π4.15) και (Π4.7.δ) προκύπτει:

$$V_{II} = \frac{\rho_1 \cdot I}{4\cdot\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\cdot\frac{2\cdot n+1}{n}\cdot\frac{\varDelta_2}{\varDelta}\cdot Y_n^m(\theta,\theta_0,\phi,\phi_0) \qquad (\Pi 4.20)$$

όπου

$$\varDelta_2 = \left[\left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot r_0^n\right]\cdot\frac{1}{r^{n+1}}-\left[\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\left(\frac{r_0}{a_2}\right)^n\cdot\frac{1}{a_2^{n+1}}\right]\cdot r^n \qquad (\Pi 4.21)$$

Τέλος, από τις σχέσεις (Π4.8.γ), (Π4.15) και (Π4.7.δ) προκύπτει:

$$V_{III} = \frac{\rho_1 \cdot I}{4\cdot\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\cdot\frac{(2\cdot n+1)^2}{n\cdot(n+1)}\cdot\frac{\varDelta_3}{\varDelta}\cdot Y_n^m(\theta,\theta_0,\phi,\phi_0) \qquad (\Pi 4.22)$$

όπου

$$\varDelta_3 = \frac{\rho_3}{\rho_2}\cdot r_0^n\cdot\frac{1}{r^{n+1}} \qquad (\Pi 4.23)$$

Στην εξαγωγή των παραπάνω σχέσεων έχουν ληφθεί υπ’ όψιν οι σχέσεις που δίνουν τις κανονικοποιημένες συναρτήσεις Legendre, οι οποίες είναι [247, 248]:

$$Y_n^m(\theta,\theta_0,\phi,\phi_0) = S_n^m(\cos\theta_0)\cdot S_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] \quad (\Pi4.24)$$

όπου

$$S_n^m(\cos\theta_0) = \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot P_n^m(\cos\theta_0) \quad (\Pi4.25)$$

$$S_n^m(\cos\theta\ ) = \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot P_n^m(\cos\theta) \quad (\Pi4.26)$$

Π4.2 Παραγωγή αναλυτικών εκφράσεων (Περιοχή ΙΙ)

Π4.2.1 Περίπτωση σημειακής πηγής ρεύματος στην περιοχή ΙΙ

Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται η περίπτωση που η πηγή ρεύματος βρίσκεται στην περιοχή ΙΙ (α_1< r_0<α_2). Όταν η σημειακή πηγή είναι στην περιοχή ΙΙ, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που ισχύουν για κάθε περιοχή σε σφαιρικές συντεταγμένες, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, είναι:

$$\nabla^2 V_I = 0, \qquad \text{για } r<\alpha_1 \quad (\Pi4.27.\alpha)$$

$$\nabla^2 V_{II} = -\rho_2\cdot I\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}_0), \qquad \text{για } \alpha_1<r<\alpha_2 \quad (\Pi4.27.\beta)$$

$$\nabla^2 V_{III} = 0, \qquad \text{για } r>\alpha_2 \quad (\Pi4.27.\gamma)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία επίλυσης, όπως στην περίπτωση που η σημειακή πηγή βρισκόταν στην περιοχή Ι, η οποία αναλύθηκε στην παράγραφο Π4.1, η λύση είναι η εξής:

$$V_I = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_{mn}\cdot r^n\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] \quad (\Pi4.28.\alpha)$$

$$V_{II} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_2 \cdot I_{mn} \cdot \frac{r^n}{r_0^{n+1}} + B_{mn} \cdot r^n + C_{mn} \cdot \frac{1}{r^{n+1}}\right] \\ \quad \cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)],\ \gamma\iota\alpha\ r < r_0 \\ \\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\rho_2 \cdot I_{mn} \cdot \frac{r_0^n}{r^{n+1}} + B_{mn} \cdot r^n + C_{mn} \cdot \frac{1}{r^{n+1}}\right] \\ \quad \cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)],\ \gamma\iota\alpha\ r > r_0 \end{cases} \tag{Π4.28.β}$$

$$V_{III} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} D_{mn} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos[m\cdot(\phi-\phi_0)] \tag{Π4.28.γ}$$

όπου

$$\left[\begin{aligned} A_{mn} &= I_{mn\cdot} \cdot \frac{2\cdot n+1}{n} \cdot \rho_1 \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\frac{1}{r_0^{n+1}} - \left(1-\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\frac{1}{\alpha_2}\cdot\left(\frac{r_0}{\alpha_2^2}\right)^n\right]}{\mathit{\Delta}} \\ B_{mn} &= I_{mn} \cdot \rho_2 \cdot \left(1-\frac{\rho_3}{\rho_2}\right) \cdot \frac{\left[\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{r_0^{n+1}} - \left(1+\frac{n+1}{n}\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\frac{1}{\alpha_2}\cdot\left(\frac{r_0}{\alpha_2^2}\right)^n\right]}{\mathit{\Delta}} \\ C_{mn} &= \rho_2 \cdot I_{mn} \cdot \left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\alpha_1^{2n+1} \cdot \frac{\left[\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\frac{1}{\alpha_2}\cdot\left(\frac{r_0}{\alpha_2^2}\right)^n - \left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\cdot\frac{1}{r_0^{n+1}}\right]}{\mathit{\Delta}} \\ D_{mn} &= I_{mn} \cdot \rho_3 \cdot \frac{2\cdot n+1}{n+1} \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot r_0^n - \left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_1}{r_0}\right)^{n+1}\cdot\alpha_1^n\right]}{\mathit{\Delta}} \end{aligned}\right.$$

(Π4.29)

με :

$$\mathit{\Delta} = \left[(1+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2})\cdot(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\rho_3}{\rho_2}) - (1-\frac{\rho_1}{\rho_2})\cdot(1-\frac{\rho_3}{\rho_2})\cdot(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^{2n+1}\right] \tag{Π4.30}$$